Harmonik Fonksiyonlar

Analitik bir fonksiyonun reel ve imajiner kısımları harmonik eşlenik fonksiyon lardır. Bundan dolayı analitik fonksiyonlar üzerine tüm teoremler, harmonik eşlenik fonksiyon çiftleri için de geçerlidir. Harmonik fonksiyonlar kendi alanlarında önemli olmakla beraber, genelde kolayca uygulanan komleks metodlar için her zaman uygun değildir. Bu durum, harmonik eşlenik fonksiyonlar tek değerli olmadığında kısmen doğrudur. Bu bölümde Cauchy teoremiyle yakından bağlantılı olan harmonik fonksiyonların bazı olgularını göreceğiz. Daha deyalı özellikler sonraki bölümlere bırakılmıştır.

Tanım ve Temel Özellikler Reel değerli bir $u(z)$ yada $u(x,y)$ fonksiyonu tanımlı ve bir Ω bölgesinde tek değerli olsun. $u(x,y)$ fonksiyonu sürekli olmakla beraber, birinci ve ikinci kısmi türevlere sahipse ve

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (54)$$

şeklinde, Laplace denklemini sağlıyorsa, Ω bölgesinde harmonik veya "bir potansiyel fonksiyon" denir.

Regülarite koşullarının zayıf olabileceğini sonra göreceğiz ancak, bu nokta göreli olarak düşük öneme sahiptir.

İki harmonik fonksiyonun toplamı ve harmonik bir fonksiyonun bir sabitle çarpımı yine harmoniktir. Bu Laplace denkleminin lineer karakterine uygun bir durumdur. En basit harmonik fonksiyonlar $ax + by$ şeklindeki lineer fonksiyonlardır. (r, θ) şeklindeki kutupsal formda ise (54) denklemi,

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{(neden?)}$$

$f(z) = u + iv$ $z = x + iy = r.e^{i\theta} = r.cos\theta + i.r.sin\theta$ ve $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ olmak üzere,
$x = r.cos\theta$, $y = r.sin\theta$ $\quad \frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta$ $\quad \frac{\partial y}{\partial r} = sin\theta$ $\quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r.sin\theta$ $\quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r.cos\theta$
$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u_x cos\theta + u_y sin\theta$
$u_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r.u_x sin\theta + r.u_y cos\theta$
$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ aynı şekilde u_θ, $u_{\theta\theta}$, (ve gerekirse, v_r, v_{rr}, v_θ, $v_{\theta\theta}$) bulunarak u için Laplace denklemlerinin sağlandığı görülür; u ve v harmonik olduğundan $C-R$ eşitliği (r,θ) formunda olmak üzere, $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ ve $u_\theta = -r.v_r$ şeklindedir.

formunu alır. Bu da bize $log\, r$ fonksiyonunun harmonik bir fonksiyon olduğunu ve sadece r' ye bağlı herhangi bir harmonik fonksiyonun

$$a\, log\, r + b$$

formunda olması gerektiğini gösterir. θ argümanı ise tek bir şekilde tanımla nabildiği her yerde harmoniktir.

Ω bölgesinde u harmonikse,

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (55)$$

analitiktir. $U = \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $V = -\frac{\partial u}{\partial y}$ yazarsak,

$$u_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial y} = u_{yy}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = u_{yx}$$

buluruz. Bu, harmonik fonksiyondan analitik fonksiyona geçmek için en natürel yöntem olarak akılda tutulmalıdır.

(55) denkleminde diferansiyele geçersek;

$$f\,dz = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) \quad \text{(neden?)} \quad (56)$$

Bu ifadede, u'nun diferansiyeli, reel kısmı,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \quad \text{dir.}$$

Eğer u'nun v gibi bir harmonik eşleniği varsa, v'nin diferansiyeli de imajiner kısmı oluşturur (56 ifadesinde);

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

şeklindedir.

Genel olarak burada tek değerli bir eşlenik fonksiyon yoktur ve bu durumda dv notasyonunu kullanmamak en iyisi olacaktır. Onun yerine

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

notasyonunu kullanabiliriz. Buna du' nun eşlenik diferansiyeli denir. Şu halde (56) daki ifadeyi yeni notasyona göre,

$$f\,dz = du + i * du \quad (57)$$

olarak yeniden yazalım.

Cauchy teoremi sayesinde $f\,dz$' nin integrali, Ω bölgesinde sıfıra homolog olan çemberi yok eder.

γ Eğrisine göre bir a noktasının indexi:
Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi, a noktasından geçmiyorsa, $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ integrali $2\pi i$ 'nin bir katıdır.
$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = n(\gamma, a).2\pi i$ ($n(-\gamma, a) = -n(\gamma, a)$ olduğu açıktır.)
Burada iki durum sözkonusu;
i) γ eğrisi bir çemberin içindeyse, çemberin dışındaki bütün a noktaları için, $n(\gamma, a) = 0$ olur.
ii)a'nın bir fonksiyonu olan $n(\gamma, a)$, γ tarafından belirlenen bütün bölgelerde bir sabit olarak bulunur. 0 ise sınırlanmamış olan alanda kalır.

Lemma:
Orijinden geçmeyen bir γ kapalı eğrisi üzerinde iki z_1 ve z_2 noktası alalım. z_1 altyarı düzlem, z_2 üst yarıdüzlemde bulunsun.
$z_1$den $z_2$ye γ_1, $z_2$den z_1e giden γ_2 eğrileri γ kapalı eğrilerini oluşturmak üzere, γ_1 reel exenin negatif kısmından geçmiyor, $\gamma_2$de reel exenin pozitif kısmından geçmeden γ eğrisini tamamlıyorsa, $n(\gamma, 0) = 1$

Tanım: Bir Ω açık kümesinde bulunan bir kapalı bir γ eğrisi, sıfıra homolog ise -Ω ya göre- , Ωnın tümleyeninde bulunan bütün a noktaları için $n(\gamma, a) = 0$ olur.

Cauchy teoreminin tanımı bu kavramla beraber daha bir kolaylaşır;
Eğer Ω bölgesinde $f(z)$ analitikse, Ω bölgesinde sıfıra homolog olan her γ kapalı eğrisi için,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

olur.

Diğer taraftan, du'nun mutlak diferansiyelinin integrali bütün çemberleri ortadan kaldırır. $(57)'$den, Ω bölgesinde sıfıra homolog olan bütün γ çemberleri için,

$$\int_\gamma *du = \int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0 \qquad (58)$$

Bu son integralin bahsetmeden geçilemeyecek bir yorumu vardır. γ eğrisi $z = z(t)$ ile tanımlanmış ise, eğimin açısı-yönü $\alpha = arg\, z^{'}(t)$ ile belirlidir ve $dx = |dz|\, cos\,\alpha$, $dy = |dz|\, sin\,\alpha$ dır. Eğimin normali $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ olur ve, buradan da, $cos\,\alpha = -sin\beta$ ve $sin\,\alpha = cos\,\beta$ elde edilir.

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \quad \text{eşitliğinde yerine koyarsak,}$$

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y}\,|dz|\,cos\,\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\,|dz|\,sin\,\alpha$$

$$*du = \frac{\partial u}{\partial y}\,|dz|\,sin\,\beta + \frac{\partial u}{\partial x}\,|dz|\,cos\,\beta$$

$$*du = (\frac{\partial u}{\partial y}\,sin\,\beta + \frac{\partial u}{\partial x}\,cos\,\beta)\,|dz|$$

parantez içini yeni bir notasyonla yeniden yazarsak,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} cos\,\beta + \frac{\partial u}{\partial y} sin\,\beta$$

buradan da

$$*du = \frac{\partial u}{\partial n}\,|dz|$$

şeklinde gösteririz. (58) ifadesi,

$$\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\,|dz| = 0 \qquad (60)$$

şeklinde yeni bir formda yazılmış olur.

Bu klasik notasyondur. Bunun asıl avantajı $\frac{\partial u}{\partial n}$, γ da dikey yönlü değişim miktarını gösterir. Örnek olarak;

pozitif yönlü olsun $\gamma\,:\,|z| = r$ eğrisinde $\frac{\partial u}{\partial r}$ kısmi türevinin yerini $\frac{\partial u}{\partial n}$ alabilir. Dezavantajı ise, sıradan bir çizgi integrali olarak ifade edilemez, ancak eğri ölçüsüne ait bir integral olarak alınır. Bu sebepten, klasik notasyon, homoloji teorisiyle alakası açısından daha az natureldir, bundan dolayı $*du$ notasyonunu tercih ediyoruz.

Basit bağlantılı bölgede, $*du$ nun integrali bütün kapalı eğrileri yok eder ve u nun tek değerli eşlenik fonksiyonu olan v, toplamsal bir sabit tarafından belirlenir.

Çoklu bağlantılı bölgede eşlenik fonksiyonların periodları vardır.

$$\int_{\gamma i} *du = \int_{\gamma i} \frac{\partial u}{\partial n}\,|dz|$$

ifadesi homoloji tabanlı kapalı eğrilere ilişkindir.

$$\int_{\gamma} *du = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0$$

eşitliğinin, harmonik fonksiyon çiftlerine ait önemli bir genellemesi vardır;

Ω bölgesinde, u_1 ve u_2 harmonik olsun. Sıfıra homolog olan her γ kapalı eğrisi için,

$$\int_{\gamma} u_1 * du_2 - u_2 * du_1 = 0$$

teorem 16 ya göre, $\gamma = \partial R$ Ω bölgesinde bir dikdörtgen olmak üzere, R de $\underline{u_1}$ dve u_2 nin, v_1, v_2 gibi tek değerli iki eşlenik fonksiyonları olsun.

$$u_1 * du_2 - u_2 * du_1 = u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = u_1 dv_2 + v_1 du_2 - d(u_2 v_1)$$

Burada $d(u_2v_1)$ tam dif.dir ve $u_1dv_2 + v_1du_2$ ise,

$$(u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2)$$

nin imajiner kısmıdır. Son diferansiyel F_1f_2dz formunda yazılabilir. Tabi R'de $F_1(z)$ ve $f_2(z)$ analitik olduğu takdirde. F_1f_2dz nin integrali Cauchy teoremiyle yokolur, elbette imajiner kısmı da öyle. Böylece şunu ispatlamış oluruz;

Teorem 19:

Ω bölgesinde sıfıra homolog olan her kapalı γ eğrisi için, $u_1$ve u_2 harmonikse,

$$\int_\gamma u_1 * du_2 - u_2 * du_1 = 0 \quad (60)$$

$u_1 = 1$, $u_2 = u$ için (58) formülü elde edilir. Son teoremdeki eşitliği klasik notasyonla yazarsak,

$$\int_\gamma \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) |dz| = 0$$

Ortalama Değer Özelliği Teorem 19' u uygulayalım:

$u_1 = \log a$ u_2 ise $|z| < p$ de harmonik bir u fonksiyonuna eşit olsun. Ω için delinmiş bir $0 < |z| < p$ diski alalım ve γ için ise pozitif yönlü $C_i : |z| = r_i < p$ çemberinde $C_1 - C_2$ disk olsun. $|z| = r$ çemberinde $*du = r.\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) d\theta$ olmak üzere,

$$log\, r_1 \int_{C_1} r_1 \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta - \int_{C_1} u\, d\theta = log\, r_2 \int_{C_2} r_2 \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta - \int_{C_2} u\, d\theta$$

diğer bir deyişle,

$$\int\limits_{|z|=r} u\, d\theta - log\, r \int\limits_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta$$

ifadesi bir sabittir. Hatta u harmonik olsa bile. Aynı şekilde,

$$\int\limits_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta$$

yine bir sabittir. Bu da şunu bize getirir;

Teorem 20. $|z| = r$ birim çemberinde bir harmonik fonksiyonun aritmetik anlamı, $log\, r$ 'nin lineer fonksiyonu olmasıdır;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} u\, d\theta = \alpha \log r + \beta \qquad (61)$$

aynı zamanda, eğer bir $\alpha = 0$ diskinde u harmonikse, bunun aritmetik anlamı u sabittir.
$\beta = u(0)$ alırsak, süreklilikten, yeni bir orjin düşünerek,

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad (62)$$

bu ifade için maximum prensibine bakalım, ve bir teorem verelim;

Teorem.12. (maximum prensibi) $f(z)$ analitik ve Ω bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$ nin bu bölgede maximumu yoktur.
Kanıt kolaydır; $w_0 = f(z_0)$ Ω bölgesinde reel ya da complex değerli olsun, Ωnın imajında $|w - w_0| < \epsilon$ olacak şekilde bir komşuluk vardır. Bu komşuluk ise $|w_0|$ dan büyük noktalar içerir. O halde $|f(z)|$ nin maximumu $|f(z_0)|$ olamaz.

Teorem.12'. Kapalı bir E kümesinde tanımlı ve sürekli bir $f(z)$ fonksiyonu eğer E'nin bütün iç noktalarında analitikse, $|f(z)|$' nin maximumu E'nin sınırlarındadır.
E kapalı ve kompakt olduğundan $|f(z)|$ E kümesinde maximuma sahiptir. Bir z_0 noktası için düşünelim. z_0sınırda ise, kanıtlanacak bir şey yok. z_0 iç noktada ise, $|z - z_0| < \delta$ komşuluğunda, ki bu E'de bir disktir, $|f(z)|$ nin $|f(z_0)|$ gibi bir maximumu vardır.

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$ formunu şöyle dönüştürelim; z_0 merkezli, r yarıçaplı bir γ eğrisi olarak, $\xi = z_0 + r.e^{i\theta}$ $d\xi = ire^{i\theta}d\theta$ olsun. $z = z_0$ için,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r.e^{i\theta}\right) d\theta$$

bu ifadenin türevlenmiş halinin (62) olduğu açıktır. Bu da bizi harmonik fonksiyonlarda maximum prensibine götürür:

Teorem 21. Sabit olmayan bir harmonik fonksiyon tanımlı olduğu bölgede ne bir maksimuma ne de bir minimum sahiptir. Bunun sonucu olarak kapalı ve sınırlı bir E kümesinde ise, maksimum ve minimum E kümesinin sınırları üzerindedir.
Analitik fonksiyonlard maximum prensibi ile aynı kanıt geçerlidir. Bu teorem $-u$ harmonik fonksiyonu için de, $f(z) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu için de ve $\log|f(z)|$ harmonik fonksiyonu için de geçerlidir.

Poisson Formülü. Maximum prensibi bizi önemli bir sonuca götürür; eğer $u(z)$, E gibi sınırlı bir kapalı küme içinde sürekliyse, ve iç noktalarda harmonikse, tek bir şekilde, E sınırları üzerideki değerleri tarafından belirlenir. Eğer u_1, u_2 aynı sınır değerlere sahip iki fonksiyon ise, $u_1 - u_2$ harmonik fonksiyonu 0 sınır değerine sahiptir. Maximum ve minimum prensibi, $u_1 - u_2$ farkının, idantik olarak E'nin sıfırına giden bir fonksiyon olduğunu söyler.

Sınır değerleri verildiğinde u fonksiyonun tespit edilmesi gibi bir problem ortaya sürüldüğünde, en basit anlamda bir kapalı disk üzerinde ele alarak bulmaya çalışalım.

62 formulu diskin merkez noktasında u nun değerini belirler. Ancak bizim ihtiyacımız, sadece merkezde değil diskin her noktasında durumun ne olacağıdır.
$|z| \leq R$ kapalı diskinde harmonik olan bir $u(z)$ harmonik fonksiyonu alalım.

$$z = S(\xi) = \frac{R.(R\xi + a)}{R + \xi}$$

Lineer transformasyonu, $|\xi| \leq 1$ i, $|z| \leq R$ ye resmeder. $\xi = 0$, $z = 0$ noktasına resmediliyorsa eğer. $u(S(\xi))$ fonksiyonu $|\xi| \leq 1$ için harmoniktir ve 62 den dolayı,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=1} u(S(\xi))\, d\,arg\,\xi$$

olur.
$\xi = \frac{R(z-a)}{R^2 - \overline{a}z}$ den, $d\,arg\,\xi = -i\frac{d\xi}{\xi} = -i\left(\frac{1}{z-a} + \frac{\overline{a}}{R^2 - \overline{a} - z}\right) dz = \left(\frac{z}{z-a} + \frac{\overline{a}z}{R^2 - \overline{a}z}\right) d\theta$ bulunur. $R^2 = z.\overline{z}$ eşitliğinden, $d\theta$ nın katsayısı için

$$\frac{z}{z-a} + \frac{\overline{a}}{\overline{z} - \overline{a}} = \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2}$$

yada buna eşdeğer olarak,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z+a}{z-a} + \frac{\overline{z} + \overline{a}}{\overline{z} - \overline{a}}\right) = Re\,\frac{z+a}{z-a}$$

yazılabilir.
Buradan iki forma ulaştık;

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(z)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=R} Re\frac{z+a}{z-a}\, u(z)\, d\theta \qquad (63)$$

Bu Poisson formülüdür. Kutupsal formda ise,

$$u\left(r.e^{1\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\,(\theta - \varphi) + r^2}\, u\left(R.e^{i\theta}\right) d\theta$$

Türev ile, kapalı bir disk içindeki $u(z)$ fonksiyonunun harmonik olduğunu biliyoruz. Aynı şekilde (zayıf bir koşul) $u(z)$ açık bir diskte harmonik, kapalı bir diskte süreklidir. Gerçekten, eğer $0 < r < 1$ ise, $u(rz)$ kapalı bir diskte harmoniktir ve buradan

$$u(ra) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z - z|^2} u(rz)\, d\theta$$

ifadesine ulaşırız. Burada artık yapacağımız şey $r \longrightarrow 1$ olmasıdır. Çünkü $u(z)$ $|z| \leq R$ de düzgün sürekli ve $u(rz) \longrightarrow u(z)$ yakınsaklığı $|z| = R$ için düzgündür.

Bütün bu bulduklarımızı bir teoremle sonuçlandıralım:

Teorem 22. $u(z)$ fonksiyonu, $|z| < R$ için harmonik, $|z| \leq R$ için sürekli olsun. $\forall |a| < R$ için,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|a|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z - a|^2} u(z)\, d\theta \qquad (64)$$

Bu teorem bizi u'nun eşlenik fonksiyonuna yönlendirir. 63 formülü,

$$u(z) = Re \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] \qquad (65)$$

köşeli parantez içindeki ifade, $|z| < R$ için z'nin bir analitik fonksiyon olduğunu gösterir. Buradan yola çıkarak;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi} + iC \qquad (66)$$

eşitliğinin reel kısmının $u(z)$ olduğunu söyleyebiliriz. C herhangi bir reel sabit. Bu formül Schwarz formülü olarak bilinir.

Özel olarak 64 ifadesinde $u = 1$ olarak alırsak, $\forall |a| < R$ için,

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - a|^2} d\theta = 2\pi \qquad (67)$$

olur.

Schwarz Teoremi Teorem 22 bize verilen bir harmonik fonksiyonun bir çember üzerindeki değerleri ile ilgili bir ifade sunar. Fakat, 64 te

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|a|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(z)\, d\theta$$

eşitliğin sağ tarafı $|z| = R$ de tanımlı bir u için, eğri parçasının sürekli olması anlamındadır. 65 te,

$$u(z) = Re \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right]$$

ifadesinde integral, analitik bir fonksiyonun reel kısmı olarak yazılabilir ve bundan dolayı da harmonik bir fonksiyondur. Sorumuz şudur; $u(z)$ fonksiyonu $|z| = R$ de sınır değerlere sahip midir? Notasyonu anlaşılır kılmak için, $R = 1$ olarak belirlenmiş, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığındaki herhangi bir eğri parçasında sürekli olan bir $U(\theta)$ fonksiyonu için,

$$Pv(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} U(\theta)\, d\theta$$

ifadesine U'nun Poisson integrali diyoruz. $Pv(z)$ yalnızca z'nin değil, U'nun da bir fonksiyonu, bir çeşit fonksiyonel. Bu fonksiyonel lineerdir;

$$P_{U+V} = P_u + P_V$$

ve bir c sabiti için,

$$P_{cV} = cP_v$$

olur. P_U pozitif lineer fonksiyonel olduğundan, $U \geq 0$ ise, $P_V(z) \geq 0$ olur. 67 formülünü, yani

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z-a|^2} d\theta = 2\pi$$

ifadesinden, $P_c = c$ çıkar. Fonksiyonelin lineer ve pozitif karakterinden,

$$m \leq U \leq M \quad \text{eşitsizliği, } m \leq P_U \leq M \quad \text{elde edilir.}$$

Sınır değer sorusu hakkındaki aşağıdaki teorem, H. A. Schwarz tarafından kanıtlanmıştır;

Teorem 23. $|z| < 1$ için $P_U(z)$ fonksiyonu harmoniktir ve,

$$\lim_{z \longrightarrow e^{i\theta_0}} P_U(z) = U(\theta_0) \qquad (68)$$

limiti, θ_0 noktasında U'nun sürekli olduğunu gösterir.
U'nun harmonik olduğunu zaten biliyoruz. Sınırdaki davranışını inceleyelim. Birim çemberin tümleyeni için, C_1ve C_2 alalım. U_1fonksiyonu C_1de U

ya rastlayarak C_2yi yoketsin. U_2de aynı şeyi C_2 için yapsın. $P_U = P_{U_1}+P_{U_2}$ olduğu açıktır. P_{U_1}den C_1 üzerinde bir çizgi integrali olduğu gözönünde tutularak, kapalı C_1 dışında her yerde harmoniktir. Aşağıdaki ifade,

$$Re\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

$|z| = 1$ de, $z \neq e^{i\theta}$ olan yerleri yok eder. Devam edersek, C_2 açık yayında $P_{U_1} = 0$ dır. Ayrıca süreklilikten dolayı, $z \longrightarrow e^{i\theta} \in C_2$ olduğunda $P_{U_1} \longrightarrow 0$ dır.
68 formülünde, U yerine $U - U(\theta_0)$ olarak almaya ihtiyaç duymuyorsak, $U(\theta_0) = 0$ farzedebiliriz. $\epsilon > 0$ verildiğinde, C_1 ve C_2 yi şöyle buluruz; C_2 nin bir iç noktası $e^{i\theta_0}$ olsun ve $e^{i\theta} \in C_2$ için $|U(\theta)| < \frac{\epsilon}{2}$ olsun. Bu şartlarda her θ için, $|U_2(\theta)| < \frac{\epsilon}{2}$ ve her $|z| < 1$ için $|P_{U_2}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ olur.
Diğer taraftan, U_1 sürekli ve $e^{i\theta_0}$ da yokeden olduğundan $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$ olduğunda $|P_{U_1}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde δ vardır.
$|P_U(z)| \leq |P_{U_1}| + |P_{U_2}| < \epsilon$ ifadesi, $|z| < 1$ ve $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$ için sağlanmış olur.

Şekilde Poisson formülünün geometrik gösterimi, Schwarz teoremi içinde açıklayıcıdır. Birim çember içinde bir z noktası bulunuyor. Çember üzerinde $e^{i\theta}$ve $e^{i\theta *}$noktaları z ile aynı düz hat üzerinde. Basitçe,

$$1-|z|^2 = |e^{i\theta}-z|.|e^{i\theta *}-z| \qquad (69)$$

ancak $\frac{(e^{i\theta}-z)}{e^{i\theta *}-z}$ oranı negatif. Bundan dolayı,

$$1-|z|^2 = -(e^{i\theta}-z).(e^{i\theta *}-\overline{z})$$

olarak yazmak durumundayız. θ nın bir fonksiyonu $\theta*$ olduğu gözönünde tutularak ve diferansiyelden, z bir sabit olacak şekilde,

$$\frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}-z} = \frac{e^{-i\theta *}d\theta *}{e^{-i\theta *}-\overline{z}} \qquad (70)$$

ve mutlak değerlerini alarak,

$$\frac{d\theta *}{d\theta} = \left|\frac{e^{i\theta *}-z}{e^{i\theta}-z}\right|$$

69 ve 70' den

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = \frac{d\theta *}{d\theta}$$

buradan da,

$$P_U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta)\, d\theta* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta*)\, d\theta$$

bulunur. Diğer bir deyişle,$P_U(z)$ yi bulmak için, her $U(\theta)$ değerini, z nin zıt noktasındaki değerle yer değiştirmek ve çember üzerindeki averajını(?) almak gerekir.

Refleksiyon (Simetri) Prensibi Simetri prensibi Lineer Transformasyonlarda incelendi. Schwarz tarafından formüle edilen bu konunun bir çok genel varyantları vardır. Refleksiyon prensibi, $u(z)$ bir harmonik fonksiyon ise, $u(\overline{z})$ fonksiyonunun da harmonik olması ve $f(z)$ analitik fonksiyon ise, $\overline{f(\overline{z})}$nin de analitik olma hallerini incelerken oluştu. Daha düz bir ifadeyle, bir bölgede $u(z)$ harmonik, $f(z)$ analitikse, Ω nın bulunduğu bölgenin reel exene göre simetriğinde yer alan $\Omega*$ bölgesinde, z in fonksiyonları olarak $u(\overline{z})$ harmonik, $\overline{f(\overline{z})}$ analitiktir. Öyle ki, $z \in \Omega* \iff \overline{z} \in \Omega$ şeklinde g.y.k gerçekleşmelidir. Bu ifadenin kanıtı, trivial olarak doğrulandığında görülür.

Simetrik bir bölgeyi ele alalım: $\Omega* = \Omega$. Çünkü Ω bağlantılıdır; en azından bir açık aralıkta reel exen ile kesişmelidir. $f(z)$ nin Ω da analitik olduğunu ve reel exenin enazından bir açık aralığında reel olduğunu düşünelim. $f(z) - \overline{f(\overline{z})}$ analitik olduğundan ve bir aralıkta yok eden olduğundan sıfıra idantiktir. Bundan dolayı Ω bölgesinde, $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ olacaktır. $f = u + iv$ notasyonuna göre yazarsak, $u(z) = u(\overline{z})$ ve $v(z) = -v(\overline{z})$
Burası önemlidir çünkü, $f(z)$ yi Ω nın her yerinde analitik olarak biliyoruz. Ω ile Ωnın üstyarı düzlemi olan Ω^+ ın kesişimi, aynı zamanda, Ω ile reel exenin kesişimini σ ile gösterelim. Göstermek istediğimiz şu;

Ωnın her yerinde analitik olan $f(z)$, Ω^+ ile kısıtlandığında, $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ simetri koşulunu sağlar mı? Diğer bir deyişle, teoremimizin bu kısmı, Ω da $f(z)$ nin analitik sürekli olduğunu iddia edebilir mi?
Her ne kadar bu bir hipotez olsa da çok güçlü bir formülasyon. Gerçekten, ana mesele şu ki, imajiner kısım olan $v(z)$ σ üzerinde yok eder ve reel kısım hakkında farzedeceğimiz hiç bir şey kalmaz. O halde refleksiyon prensibine ait tanımlamayı harmonik fonksiyonlar üzerinde düşünebiliriz.

Teorem 24. Simetrik bir Ω bölgesinin üst yarı düzlemdeki kısmı Ω^+ olsun. Varsayalım ki, $v(x)$, $\Omega^+ \cup \sigma$ da sürekli, Ω^+ da harmonik ve σ üzerinde sıfır olsun. O halde v nin Ω ya doğru olan bir harmonik uzantısı, $v(\overline{z}) = -v(z)$ şeklindeki simetrik ilişkiyi sağlar. Aynı şartlarda, Ω^+ta analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı v ise, $f(z)$ de, $f(\overline{z}) = \overline{f(\overline{z})}$ şartını

sağlayacak bir analitik uzantıya sahiptir.

Kanıt için, Ω^+ta $v(z)$ ye eşit bir $V(z)$ fonksiyonu oluşturalım. Ω^+ ta $-v(\overline{z})$ ye eşit, σ da 0 olsun. V nin σda harmonik olduğunu göstereceğiz.
Ω bölgesi içinde, $x_0 \in \sigma$ merkezli bir disk düşünelim ve V nin bu diskteki sınır değerlerine ilişkin Poisson integrali de P_V olsun. $V - P_V$ farkı üst yarı diskte harmoniktir. Bu yarı çemberi siler (teorem 23), çap üzerindedir, çünkü $V \longrightarrow 0$ iken tanımdan dolayı, and P_V vanishes by obvious symmetry. Maximum ve minimum prensibi, üst yarı düzlemde $V = P_V$ yi sağlar ve aynı kanıtlar alt yarı düzlem için de tekrarlanabilir. V bütün diskte harmoniktir, özellikle de x_0 noktasında.
Teoremin geri kalanı için, σ merkezli bir disk alalım. Bütün disk için v yi zaten incelemiştik. v aynı zamanda $-u_0$ şeklinde bir eşlenik harmonik fonksiyona da sahip olduğundan, aynı diski $u_0 = Re\, f(z)$, üst yarı diskte alabiliriz.

$$U_0(z) = u_0(z) - u_0(\overline{z})$$

alalım. Reel çap üzerinde $\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0$ ve aynı zamanda,

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = 2\frac{\partial u_0}{\partial y} = -2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$\frac{\partial U_0}{\partial x} - i\frac{\partial U_0}{\partial y}$ fonksiyonu analitik olduğundan, reel exeni siler, idantiktir. U_0 sabit olduğundan sıfıra eşittir. $u_0(z) = u_0(\overline{z})$ kanıtlanmıştır.